Proceedings of IAM, V.13, N.1, 2024, pp.119-125
DOI: 10.30546/2225-0530.13.1.2024.019.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

Р.А. Аманов[1], С.Т. Гусейнов[2]

[1]Национальная академия авиации Азербайджана, Баku, Azerbaijan
[2]Бакинский Государственный Университет, Баku, Azerbaijan
e-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru, amanov.rabil57@gmail.com

Резюме. В настоящей работе излагается подход к априорным оценкам решений нелинейных уравнения и неравенств в частных производных, основанный на методе пробных функций (см. [6]).

Ключевые слова: Квазилинейные уравнения, Слабое решение, Пробная функция.

AMS Subject Classification: 35K60, 35K70.

1. Введение

В настоящее время большой интерес вызывают вопросы отсутствия глобальных неотрицательных (нетривиальных) решений квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств. При этом основное внимание уделяется изучению уравнений и неравенств во всем пространстве R^{n} и в конических областях (конусах). Напомним, что конусом называется множество $K \subset R^n$, содержащее вместе с любой своей точкой $x \in K$ также все точки вида $\lambda \cdot x$, где $\lambda = R_+ \ (\lambda > 0)$. Под глобальным понимается решение, определенное для всех $x \in R^n$ $(x \in K)$, но не обязательно интегрируемой или ограниченное на всем $R^n(K)$.

2. Постановка задачи

Проблеме отсутствия, или, другими словами, необходимым условиям существования решения уделяется большое внимание. Последние годы был достигнут значительный успех в этом направлении. В этой связи укажем на работы [1-6].

Рассмотрим уравнения и неравенства вида

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(|x|^{\gamma} u\right) \geq |x|^{\sigma} \cdot |u|^{q}, \qquad x \in R^n \tag{1}$$

$$cq > 1,\ \gamma < 2 \ \text{ и } \ \sigma > -2,\ \sigma > \gamma - 2 \ .$$

*Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики БГУ 02.04.2024

Пусть

$$|x|\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)\cdot\frac{q}{q-1}\in L^1_{loc}(\Re^n\setminus B_R) \tag{2}$$

$$cB_R=\left\{x\in\Re^n\big|\,|x|<R \quad \text{при} \quad \mathrm{R}\ge 1\right\}$$

Определение. Под слабым решением задачи (1) понимается функция и $\Re^n\to\Re$ такая, что $|x|^{\gamma}|u(x)|,\ |x|^{\sigma}\cdot|u|^{q}\in L^1_{loc}(\Re^n)$, и удовлетворяющая неравенству

$$-\int_{\Re^n}(x)^{\gamma}u(x)\Delta\varphi\,dx\ge\int_{\Re^n}|x|^{\sigma}\cdot|u|^{1}\varphi\,dx \tag{3}$$

для любой функции $\varphi(x)\ge 0$ из класса $C_0^2\left(\Re^n\right)$.

Теорема. Пусть показатель q удовлетворяет неравенству

$$1<q\le\frac{n+\sigma}{n+\gamma-2} \tag{4}$$

Тогда не существует глобального нетривиального слабого решения задачи (1).

Доказательство. В силу определения решения имеем

$$\int_{\Re^n}|x|^{\sigma}|u|^{q}\varphi dx\le\int_{\Re^n}|x|^{\gamma}|u(x)||\Delta\varphi(x)|dx=$$

$$=\int_{\Re^n}|x|^{\sigma/q}|u|\cdot\varphi^{\frac{1}{q}}\cdot|x|^{-\frac{\sigma}{q}}|x|^{\gamma}\cdot\varphi^{-\frac{1}{q}}\cdot|\Delta\varphi|dx\le \tag{5}$$

$$\le\left(\int_{\Re^n}|x|^{\sigma}\cdot|u|^{q}\varphi dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Re^n}|x|^{\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)d'}\cdot\frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{\frac{q'}{q}}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{q}\cdot\int_{\Re^n}|x|^{\sigma}\cdot|u|^{q}\varphi dx+\frac{1}{q'\varepsilon^{q'-1}}\cdot\int_{\Re^n}|x|^{\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)q'\cdot}\frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q'}-1}dx$$

Отсюда получаем следующую априорную оценку:

$$\int_{\Re_n}|x|^{\sigma}\cdot|u|^{q}\varphi dx\le C_0\int_{\Re^n}|x|^{\left(\gamma-\frac{\sigma}{1}\right)q'}\cdot\frac{|\Delta\varphi|}{\varphi^{q'}-1}dx\,. \tag{6}$$

где

$q'=\dfrac{q}{q-1},\quad C_0=\dfrac{q-1}{q-\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon^{q'-1}},\quad \varepsilon>0$ - параметр.

Выберем теперь пробную функцию $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x)=\varphi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \tag{7}$$

где $\varphi_0 \ge 0$ из класса $C_0^2(\Re)$ такая, что

$$\varphi_0(S)=\begin{cases}1, & 0\le S\le 1,\\ 0, & S\ge 2.\end{cases}$$

Сделаем теперь замену переменных

$$\Im=\frac{x_i}{R} \tag{8}$$

Тогда получим $\varphi(x)=\varphi_0\left(|\xi|^2\right)$ и

$$\int_{\Re^n}|x|^{\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)q'}\cdot\frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q''-1}}dx=R^{\theta}\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\zeta|^{\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)q'}\cdot\frac{|\Delta\varphi_0|}{\varphi_0^{q'-1}}d\zeta\,, \tag{9}$$

где

$$\theta=n-2q'+\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)q'' \tag{10}$$

и

$$|\Delta\varphi_0|=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_i^2}\right|.$$

Выберем теперь пробную функцию φ_0 вида (7) так, чтобы интеграл в правой части (9) являлся конечным. Ясно, что такая функция φ_0 существует.

Выберем пробную функцию φ_0 такую, что

$$\frac{|\Delta\varphi_0|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}}<\infty$$

при $1\le|\zeta|\le\sqrt{2}$, существование такой функции является очевидным фактом.

Обозначим через

$$C_1=sup\left\{\frac{|\Delta\varphi_0|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}}\quad \text{при}\quad 1\le|\zeta|\le\sqrt{2}\right\},$$

и

$$C_{\gamma,\sigma}=\int_{1\le|\zeta|\le\sqrt{2}}|\zeta|^{\left(\gamma-\frac{\sigma}{q}\right)\cdot q'}d\zeta$$

Тогда из формулы (6) следует, что справедлива априорная оценка

$$\int_{\Re_n} |x|^{\sigma} \cdot |u|^q \varphi dx \le C_0 \cdot C_1 \cdot C_{\gamma,\sigma} \cdot R^{\theta}. \tag{11}$$

Отсюда получаем после перехода к пределу при $R \to \infty$, что если $\theta < 0$, то

$$\int_{\Re^n} |x|^{\sigma} |u|^q dx = 0.$$

Таким образом, утверждения теоремы доказано при $\theta < 0$, т.е. при

$$1 < q < \frac{n+\sigma}{n+\gamma-2}. \tag{12}$$

В этом случае соотношение (9) влечет

$$\int_{\Re^n} |x|^{\left(\gamma - \frac{\sigma}{q}\right)q'} \cdot \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx = C_1 \cdot C_{\gamma,\sigma}. \tag{13}$$

Следовательно, в силу (6) имеет априорную оценку

$$\int_{\Re_n} |x|^{\sigma} \cdot |u|^q \varphi dx \le C_0 C_1 \cdot C_{\gamma,\sigma},$$

при любом, $R \to \infty$ так что

$$\int_{\Re_n} |x|^{\sigma} \cdot |u|^q dx \le C_0 C_1 \cdot C_{\gamma,\sigma}. \tag{14}$$

Возвратимся теперь к неравенству (5). Заметим, что

$$sup\, p\{\Delta\varphi\} \subset \left\{x \in \Re^n \middle| R \le |x| \le \sqrt{2}R\right\} = \overline{B_{\sqrt{2}R}} \setminus B_R.$$

Тогда соотношение (5) в силу неравенства Гельдера влечет

$$\int_{\Re^n} |x|^{\sigma} |u|^q \varphi dx \le \int_{\Re^n} |x|^{\gamma} |u(x)||\Delta\varphi| dx \le \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\gamma} |u| \cdot |\Delta\varphi| dx =$$

$$= \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\gamma} |x|^{\frac{\sigma}{q}} \cdot |x|^{\frac{\sigma}{q}} \cdot |u| \cdot |\Delta\varphi|^{\frac{1}{q}} \cdot \varphi^{\frac{1}{q}} \varphi^{-\frac{1}{q}} dx \le R \le |x| \le \sqrt{2}R \le$$

$$\le \left(\int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\sigma} |u|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} x \left(\int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\left(\gamma - \frac{\sigma}{2}\right)q'} \cdot \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \tag{15}$$

$$\le \left(C_1 \cdot C_{\gamma,\sigma}\right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\sigma} |u|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Но в силу (14) и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_{\Re^n} |x|^{\sigma} \cdot |u|^q dx$ имеем

$$\int\limits_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\sigma} |u|^q dx = 0$$

при $R \to \infty$.

Тогда, переходя к пределу при $R \to \infty$ в (15), получаем

$$\int\limits_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |x|^{\sigma} |u|^q dx = 0$$

Таким образом, и в этом случае *u=0*, т.е. окончательно с учетом (12) условие отсутствия рения принимает вид

$$1 < q < \frac{n+\sigma}{n+\gamma-2}$$

Отметим, что в условиях теоремы отсутствует условие эллиптичности.

Замечание. Теорема является не улучшаемой, т.е. показатель q нельзя увеличить в общих условиях этой теоремы.

Этот факт следует из простого контр примера.

Пусть $q > \dfrac{n+\sigma}{n+\gamma-2}$. Возьмем функция *u(x)* в виде

$$u(x) = \frac{\varepsilon}{\left(1+|x|^2\right)^{1/(q-1)}}$$

с достаточно малым ε>0. Тогда положительная гладкая функция удовлетворяет неравенству.

$$-\Delta u \ge u^q, \quad x \in R^n.$$

Таким образом неравенство (4) является не улучшаемым

.

3. Заключение

В работе рассматривается класс квазилинейных эллиптических уравнений и неравенство второго порядка с неограниченными коэффициентами. Доказана теорема об отсутствии глобального решения уравнения. Найдено точное значение показателя q данного нелинейного уравнения и неравенства.

Литература

1. Bagirov Sh.G. On behavior at infinity of the solutions of a semilinear elliptic equation of second order, Proc.Inst.Math.Mech.natl.Acad.Sci.Azerb. , V.41, N.1, (2015), pp.94-103.

2. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutins of nonlinear elliptic equations, Commun.Pure and Appl.Math., V.34, (1981), pp.525-598.
3. Багиров Ш.Г. Отсутствие глобальных положительных решений слабо связанных систем полулинейных параболических уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами по времени, Дифференциальные уравнения, Т.56, N.6, (2020), с.732-744.
4. Гусейнов С.Т. Неравенство Харнака для решений p-Лапласиана с частично макенхауптовым весом, Дифференаицальные уравнения, Т.53, N.5, (2017), с.653-664.
5. Лантев Г.Н. Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах, Изв.РАН, сер.мат., Т.64, N.6, (2000), с.107-124.
6. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных, Тр.МИАН, Т.234, (2001), с.3-383.

QUASI-LINEAR EQUATIONS AND SECOND-ORDER INEQUALITIES WITH UNLIMITED COEFFICIENTS

R.A.Amanov[1], S.T.Huseynov[2]

[1] National Aviation Academy of Azerbaijan, Baкu, Azerbaijan
[2] Baku State University, Baкu, Azerbaijan
e-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru, amanov.rabil57@gmail.com

ABSTRACT

This paper outlines an approach to a priori estimates of solutions to nonlinear equations and partial differential inequalities, based on the test function method (see [6]).

Keywords: Quasilinear equations, Weak solution, Test function.

References

1. Bagirov Sh.G. On behavior at infinity of the solutions of a semilinear elliptic equation of second order, Proc.Inst.Math.Mech.natl.Acad.Sci.Azerb., V.41, N.1, (2015) pp. 94-103.
2. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutins of nonlinear elliptic equations, Commun. Pure and Appl. Math., V.34, (1981), pp.525-598.
3. Bagirov Sh.G. Otsutstvie global'nykh polozhitel'nykh resheniy slabo svyazannykh sistem polulineynykh parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami po vremeni, Differentsial'nye uravneniya, T.56, N.6, (2020), s.732-744 (Bagirov Sh.G. Absence of global positive solutions of weakly coupled systems of second-order semilinear parabolic equations with

periodic coefficients in time , Differential Equations, V.56, N. 6, (2020), pp.732-744.)

4. Guseynov S.T. Neravenstvo Kharnaka dlya resheniy r-Laplasiana s chastichno makenkhauptovym vesom, Differenaitsal'nye uravneniya, T.53, N.5, (2017), s.653-664 (Guseinov S.T. Harnack’s inequality for solutions of the p-Laplacian with partially Muckenhoupt weight, Differential equations, V.53, N.5, (2017), pp. 653-664.)
5. Lantev G.N. Otsutstvie global'nykh polozhitel'nykh resheniy sistem polulineynykh ellipticheskikh neravenstv v konusakh, Izv.RAN, ser.mat., T.64, N.6, (2000), s.107-124 (Lantev G.N. Absence of global positive solutions to systems of semilinear elliptic inequalities in cones, Izv.RAN, ser.mat., V.64, N.6, (2000), pp.107-124).
6. Mitidieri E., Pokhozhaev S.I. Apriornye otsenki i otsutstvie resheniy nelineynykh uravneniy i neravenstv v chastnykh proizvodnykh. Tr.MIAN, T.234, (2001), s.3-383 (Mitidieri E., Pokhozhaev S.I. A priori estimates and the absence of solutions to nonlinear equations and partial differential inequalities, Tr.MIAN, V.234, (2001), pp.3-383).